



עבודת קיץ למסיימי י' 5 יחידות מתמטיקה לקראת תשפ"ד

תלמידות.ים יקרות.ים,

זו עבודת הקיץ לקראת כיתה י"א. העבודה מבוססת על דפי השאלות לבדיקת הבנה שחולקו במהלך השנה. אין צורך להגיש את העבודה. במהלך השבועיים הראשונים של כיתה י"א ייערך מבחן המבוסס על עבודת הקיץ.

בהצלחה ועבודה נעימה!

1.

נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{ax} + bx$ ($a \neq 0$).

הנקודה $(8, -32)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה.

(א) הוכח כי: $a = 8$ ו- $b = -12$.

(ב) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(ג) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(ד) קבע את סוג הקיצון בנקודה $(8, -32)$.

(ה) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(ו) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פיתרון:

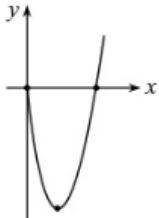
(ב) $x \geq 0$

(ג) עלייה: $x > 8$, ירידה: $0 \leq x < 8$

(ד) מינימום.

(ה) $(0, 0)$, $(18, 0)$

(ו) ראה סרטוט משמאל.



2.

נתונה הפונקציה $f(x) = 4x\sqrt{2-x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. הפונקציה $g(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $f(x)$, כלומר $g(x) = f'(x)$.

שרטט בתחום $-1.2 \leq x \leq 1.2$ את גרף הפונקציה $g(x)$.

הנח שבתחום הנ"ל יש לפונקציה $g(x)$ נקודת קיצון אחת בלבד.

פתרון:

א.

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

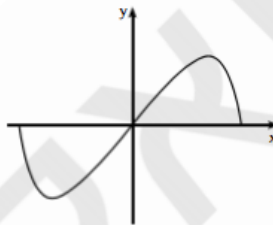
ב. $(1; 4)$ מקסימום מוחלט, $(-1; -4)$ מינימום מוחלט.

ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$; תחומי ירידה: $1 < x < \sqrt{2}$ או $-\sqrt{2} < x < -1$.

ה.



ד.



3.

נתונה הפונקציה $y = \sqrt{ax^2 - 16a}$, a הוא פרמטר שונה מאפס.

א. חשב את a , אם שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 8$ הוא $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ד. הוכח: נגזרת הפונקציה אינה מתאפסת בתחום ההגדרה של הפונקציה.

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. נמק.

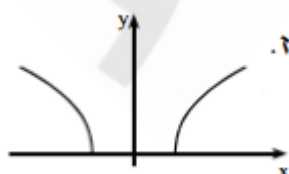
ו. מהם השיעורים של נקודות המינימום המוחלט של הפונקציה? נמק.

ז. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון:

7. א. 0.5. ב. $x \leq -4$ או $x \geq 4$. ג. $(-4; 0)$, $(4; 0)$.

ה. עלייה: $x > 4$, ירידה: $x < -4$. ו. $(-4; 0)$, $(4; 0)$.



לפונקציה $f(x) = x\sqrt{a-x^2}$ יש נקודות קיצון (פנימית) ב- $x = 3$.

א. מצא את a .

ב. הוכח שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

ג. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון,

תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה שבהן שיעור ה- x שווה

לשיעור ה- y .

פתרון. א. 18. ג. תחום הגדרה: $-\sqrt{18} \leq x \leq \sqrt{18}$.

נקודות קיצון: $(3;9)$ מקסימום, $(-3;-9)$ מינימום,

$(\sqrt{18};0)$ מינימום, $(-\sqrt{18};0)$ מקסימום.

עלייה: $-3 < x < 3$, ירידה: $3 < x < \sqrt{18}$

או $-\sqrt{18} < x < -3$.

נקודות חיתוך: $(0;0)$, $(\sqrt{18};0)$, $(-\sqrt{18};0)$.

ה. $(0;0)$, $(\sqrt{17};\sqrt{17})$, $(-\sqrt{17};-\sqrt{17})$.



חלק ב':

21. לפונקציה $f(x) = \sqrt{-x^2 + mx - 8}$ יש נקודת קיצון פנימית ששיעור ה- x שלה הוא $x = 3$.

א. מצא את m .

ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

3. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן. 4. תחומי העלייה והירידה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x) = -f(x)$. מבלי לגזור את הפונקציה $g(x)$, מצא את שיעורי

נקודת הקיצון הפנימית שלה ואת סוגה.

22. שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x - m\sqrt{x}$ בנקודה שבה $x = 4$ הוא -1 .

א. מצא את m .

ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

3. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן. 4. תחומי העלייה והירידה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה הפונקציה: $g(x) = 5f(x)$. מבלי לגזור את הפונקציה $g(x)$, מצא את שיפוע הישר המחבר

בין שתי נקודות הקיצון שלה.

23. שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = a\sqrt{x} - x^2$ בנקודה שבה $x=4$ הוא -7.

א. מצא את a .

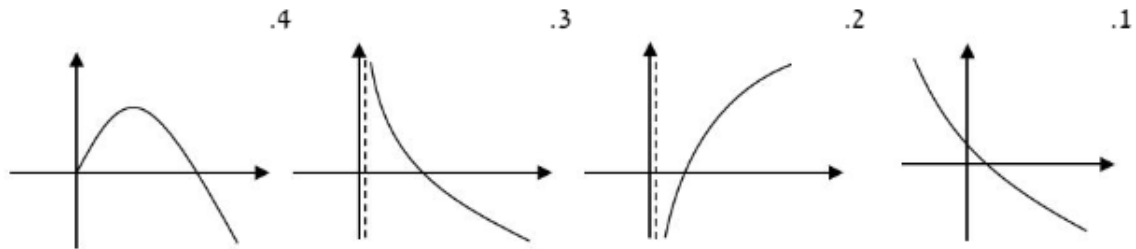
ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

3. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן. 4. תחומי העלייה והירידה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את תחום ההגדרה של הנגזרת $f'(x)$ וקבע איזה מהגרפים הבאים עשוי להיות גרף הנגזרת שלה. נמק.



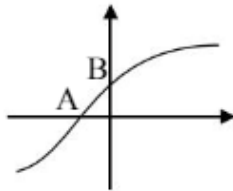
25. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 + mx + 5}$. לפניך גרף הנגזרת $f'(x)$ החותך

את הצירים בנקודות: $A(-1, 0)$ ו- B כמתואר בשרטוט. מצא את:

א. הפרמטר m ואת שיעורי הנקודה B .

ב. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. שיעורי נקודת הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ ואת סוגה.



26. לפונקציות $f(x) = \sqrt{2ax - x^2}$ ו- $g(x) = 3\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ יש אותה נקודת קיצון פנימית. מצא את:

א. הפרמטר a .

ב. שיעורי נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה $f(x)$ ואת סוגן.

27. לגרף הפונקציה: $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{b - 4x^3}$ יש נקודת קיצון פנימית בנקודה $x = 1$.

א. מצא את b .

ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. תחום ההגדרה.

2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

3. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא עבור אילו ערכי k למשוואה $f(x) = k$ יש שלושה פתרונות.

ה. הגדירו פונקציה חדשה: $h(x) = f(x) - p$. מצא עבור אילו ערכי p , יהיו למשוואה $h(x) = 0$

שלושה פתרונות. נמק את תשובתך.

30. (*) אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה: $f(x) = ax^2 \cdot \sqrt{b-x}$ היא (4,16).

א. מצא את a ו- b .

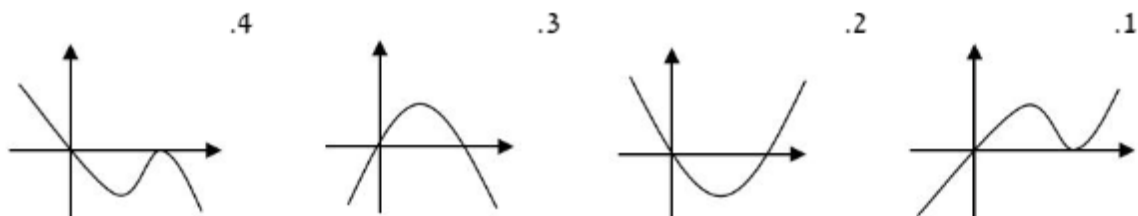
ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

3. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן. 4. תחומי העלייה והירידה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מבין הגרפים המצורפים מצא איזה עשוי להיות גרף הנגזרת $f'(x)$. נמק.



31. (*) גרף הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x+m} - \sqrt{x} - 2$ חותך את ציר ה- x בנקודה (9,0).

א. מצא את m .

ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

3. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן. 4. תחומי העלייה והירידה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה הפונקציה: $g(x) = f(x+t)$ שהגרף שלה עובר בראשית הצירים. מצא את t .

ה. (**) נתונה הפונקציה: $h(x) = f(p \cdot x)$.

קבע אם קיים p שעבורו גרף $h(x)$ עובר בראשית הצירים. נמק את תשובתך.

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{a-3x}$.

א. נתון כי לפונקציה יש נקודת קיצון בקצה תחום ההגדרה בנקודה שבה $x=1.5$. מצא את a .

ב. הצב $a=4.5$ בפונקציה וענה על הסעיפים הבאים:

(1) מהו תחום ההגדרה של $f(x)$?

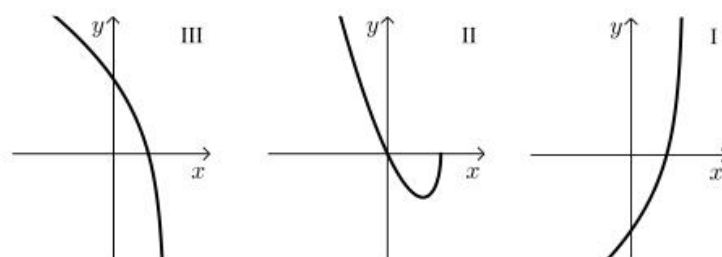
(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של $f(x)$.

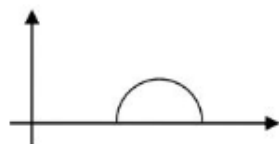
(4) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

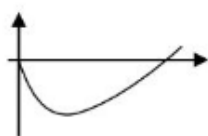
(2) איזה מבין הגרפים הבאים מתאים לגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?



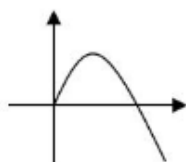
תשובות:



- (21) א. $m = 6$. ב. $2 \leq x \leq 4$. 2. $(2,0)$, $(4,0)$. 3. פנימית: $\max(3,1)$.
קצה: $\min(2,0)$, $\min(4,0)$. 4. עולה: $2 < x < 3$; יורדת: $3 < x < 4$.
ג. השרטוט משמאל. ד. $\min(3,-1)$.



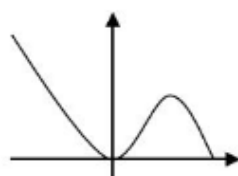
- (22) א. $m = 8$. ב. $0 \leq x$. 2. $(0,0)$, $(64,0)$. 3. פנימית: $\min(16,-16)$, קצה: $\max(0,0)$. 4. עולה: $x > 16$; יורדת: $0 < x < 16$.
ג. השרטוט משמאל. ד. השיפוע -5 .



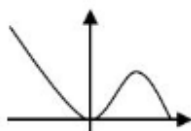
- (23) א. $a = 4$. ב. $0 \leq x$. 2. $(0,0)$, $(2.52,0)$. 3. פנימית: $\max(1,3)$. קצה: $\min(0,0)$.
4. עולה: $0 < x < 1$; יורדת: $x > 1$. ג. השרטוט משמאל.
ד. תחום ההגדרה: $x > 0$ והגרף המתאים הוא גרף 3.

- (25) א. $m = 2$, $B(0, 0.45)$. ב. כל x . ג. $\min(-1,2)$.

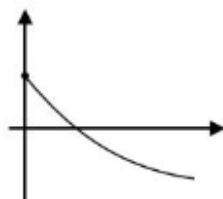
- (26) א. $a = 3$. ב. נקודות קיצון קצה: $\min(0,0)$, $\min(6,0)$.



- (27) א. $b = 7$. ב. $x \leq 1.21$. 2. $(0,0)$, $(1.21,0)$. 3. פנימיות: $\min(0,0)$, $\max(1, 1.73)$. בקצה התחום: $\min(1.21,0)$.
ג. השרטוט משמאל. ד. $0 < k < 1.73$. ה. $0 < p < 1.73$.

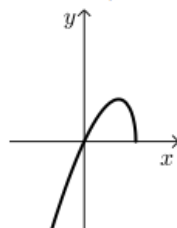


- (30) א. $a = 1$, $b = 5$. ב. $x \leq 5$. 2. $(5,0)$, $(0,0)$. 3. פנימיות: $\min(0,0)$, $\max(4,16)$. קצה: $\min(5,0)$.
4. עולה: $0 < x < 4$; יורדת: $4 < x < 5$ או $x < 0$. ג. השרטוט משמאל. ד. גרף 3.



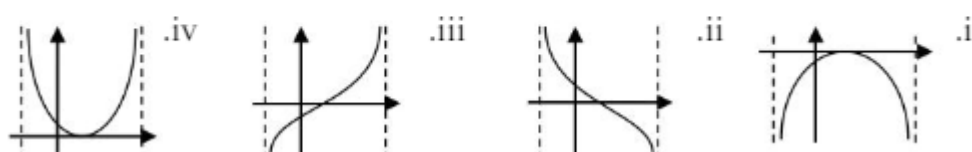
- (31) א. $m = 16$. ב. $0 \leq x$. 2. $(0,2)$, $(9,0)$. 3. רק בקצה התחום: $\max(0,2)$.
4. עולה: אף x ; יורדת: $x > 0$. ג. השרטוט משמאל. ד. $t = 9$. ה. לא קיים ערך p כזה.

- (7) א. $a = 4.5$. ב. $x \leq 1.5$. (1) $(1.5,0)$, (2) $(0,0)$, (3) $(1, \sqrt{1.5})$ מקסימום, מינימום. (4) להלן סרטוט:
ג. (1) $x < 1.5$. (2) גרף III.



גרף הפונקציה: $f(x) = 8 - b \cdot \sqrt{-x^2 + 6x + 16}$ חותך את ציר ה- y בנקודה A .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. נתון ששיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A הוא -1.5 . מצא את b .
- ג. עבור הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 1. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
 2. שיעורי נקודות הקיצון וסוגן.
 3. תחומי העלייה והירידה.
 4. תחומי החיוביות והשליליות.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. קבע איזה מהגרפים הבאים הוא גרף הנגזרת $f'(x)$.



ו. הגדירו את הפונקציה: $g(x) = f(x) + c$. מצא עבור אילו ערכים של c :

1. גרף הפונקציה $g(x)$ ישיק לציר ה- x .
2. גרף הפונקציה $g(x)$ לא יחתוך את ציר ה- x .
3. למשוואה $g(x) = 0$ יהיו שני פתרונות.
- ז. הגדירו את הפונקציה: $h(x) = -f(x)$.
 1. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
 2. מצא את שיעורי נקודות הקיצון המוחלטות של גרף $h(x)$ ואת סוגן.
 3. מצא באילו תחומים של x מתקיים: $0 < h(x)$ וגם $0 < h'(x)$.

תשובות: א. $-2 \leq x \leq 8$. ב. $b = 2$. ג. 1) $(0, 0)$, 2) בקצה התחום: $\max(-2, 8)$, $\max(8, 8)$.

פנימית: $\min(3, -2)$. 3) עולה: $3 < x < 8$; יורדת: $-2 < x < 3$. 4) חיוביות: $6 < x \leq 8$ או $-2 \leq x < 0$; שליליות: $0 < x < 6$. ד. השרטוט השמאלי.



ה. גרף iii. 1) $c = 2$. 2) $2 < c$ או $c < -8$. 3) $-8 \leq c < 2$.

ז. 1) השרטוט הימני. 2) $\min(8, -8)$, $\min(-2, -8)$, $\max(3, 2)$. 3) $0 < x < 3$.

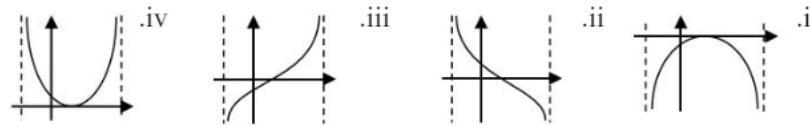
חלק ב': תרגיל מסכם בחקירת שורש

שאלה מסכמת - סעיפי חשיבה בחקירת פונקציית שורש

שאלה זו, המיועדת לתלמידי הקבוצות 4 ו-5 יחידות לימוד, היא הזדמנות לתרגול מעמיק של סעיפי חשיבה מגוונים המתלווים לחקירת פונקציה ומטרתם לשפר את יכולות ההסקה והניתוח הגרפי. מרבית הסעיפים עוסקים בביצוע טרנספורמציות והזזות של גרף הפונקציה $f(x)$ וכמעט שלא נדרש חישוב.

גרף הפונקציה: $f(x) = 8 - b \cdot \sqrt{-x^2 + 6x + 16}$ חותך את ציר ה- y בנקודה A .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. נתון ששיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A הוא -1.5 . מצא את b .
- ג. עבור הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 1. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
 2. שיעורי נקודות הקיצון וסוגן.
 3. תחומי העליה והירידה.
 4. תחומי החיוביות והשליליות.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. קבע איזה מהגרפים הבאים הוא גרף הנגזרת $f'(x)$.

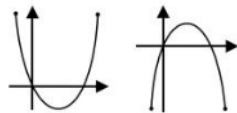


ו. הגדירו את הפונקציה: $g(x) = f(x) + c$. מצא עבור אילו ערכים של c :

1. גרף הפונקציה $g(x)$ ישיק לציר ה- x .
2. גרף הפונקציה $g(x)$ לא יחתוך את ציר ה- x .
3. למשוואה $g(x) = 0$ יהיו שני פתרונות.
- ז. הגדירו את הפונקציה: $h(x) = -f(x)$.
1. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
2. מצא את שיעורי נקודות הקיצון המוחלטות של גרף $h(x)$ ואת סוגן.
3. מצא באילו תחומים של x מתקיים: $0 < h(x)$ וגם $0 < h'(x)$.

תשובות: א. $-2 \leq x \leq 8$. ב. $b = 2$. ג. $(1, 6)$, $(0, 0)$. ד. בקצה התחום: $\max(8, 8)$, $\max(-2, 8)$.

פנימית: $\min(3, -2)$. עולה: $3 < x < 8$; יורדת: $-2 < x < 3$. חיוביות: $6 < x \leq 8$ או $-2 \leq x < 0$; שליליות: $0 < x < 6$. ד. השרטוט השמאלי.

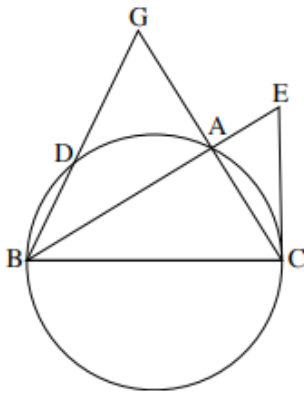
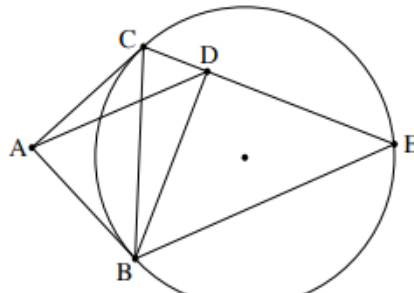
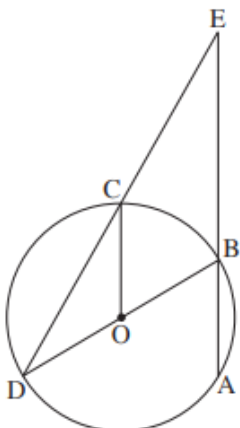


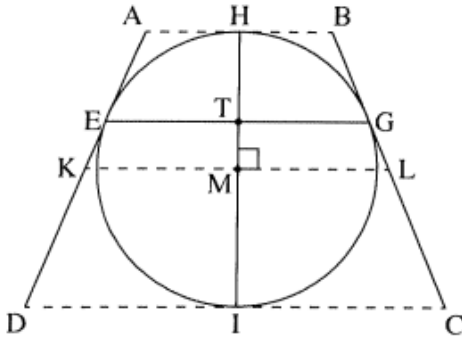
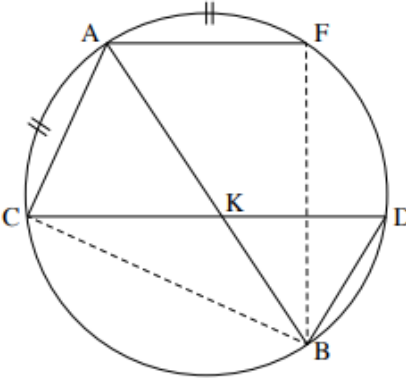
ה. גרף iii. ו. $c = 2$. ז. $c < -8$ או $2 < c$. ח. $-8 \leq c < 2$.

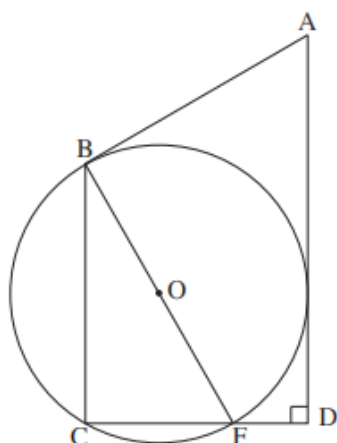
ז. 1. השרטוט הימני. 2. $\min(8, -8)$, $\min(-2, -8)$, $\max(3, 2)$. 3. $0 < x < 3$.

חלק ג': שאלות מסכמות לבדיקת הבנה – הנדסה

א. $\angle BAG = 2\alpha$ ב. $\angle ABG = 90^\circ - \alpha$ ג. $\angle AGB = 90^\circ - \alpha$ ד. הוכחה. ה. $R = \frac{7}{\sqrt{3}}$ ו. הוכחה. ז. $S_{\triangle ADG} = 3S$ (2)	נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O. מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים: הישר AB משיק למעגל בנקודה B, הישר AD עובר דרך מרכז המעגל O וחותך את המעגל בנקודות C ו-D, והישר AG מאונך לישר AD (ראו סרטוט). הנקודות B, D ו-G נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט. נסמן: $\angle ADB = \alpha$. א. הביעו את כל זוויות המשולש ABG באמצעות α. ב. הוכיחו: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$. נתון: $AG = 7$, $AC = \frac{1}{2}DC$. ג. חשבו את R. נסמן ב-S את שטח המשולש BDC. ד. (1) הוכיחו: $\triangle ADG \sim \triangle BDC$. (2) הביעו את שטח המשולש ADG באמצעות S.
א. הוכחה. ב. $\frac{1}{2}$ ג. $S_{BFC} = 4S$, $S_{DFC} = 2S$ ד. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ה. $\sqrt{6}a$ (1) ו. $\sqrt{3}a$ (2)	במלבן ABCD, הנקודה E נמצאת על הצלע AD. הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה F. המרובע EABF הוא בר חסימה במעגל. א. הוכיחו: $\triangle DAB \sim \triangle BFC$. נתון: $DE = EA$. ב. חשבו את היחס $\frac{EF}{FC}$. נסמן את שטח המשולש DEF ב-S. ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו-BFC באמצעות S. ד. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC. נסמן: $DE = a$. ה. (1) הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a. (2) הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF באמצעות a.

א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $AC = \frac{1}{2}R$ ד. $\frac{16}{15}$.	משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R (ראה סרטוט). הצלע BC היא קוטר במעגל. AG הוא המשיך הצלע CA. הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D. נתון: $GA = AC$. א. הוכח כי הישר AB חוצה את $\angle GBC$. ב. הוכח כי $\triangle GBC \sim \triangle GAD$. נתון כי $\frac{S_{\triangle DBCA}}{S_{\triangle GAD}} = 15$. ג. הבע באמצעות R את אורך הצלע AC. דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשיך הקטע BA בנקודה E. ד. חשב פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC. 
	מנקודה A יוצאים שני ישרים, המשיקים למעגל בנקודות B ו-C (ראה סרטוט). נתון כי $\angle CAB = 90^\circ$. BE ו-CE הם מיתרים במעגל. המעגל החוסם את המשולש ABC חותך את המיתר CE בנקודה D. א. הוכח כי $BD = DE$. ב. הוכח כי $\triangle ADB \sim \triangle CEB$. ג. הוכח כי $S_{\triangle CEB} = 2 \cdot S_{\triangle ADB}$. 
6. ד.	AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O. הרדיוס OC מקביל למיתר AB, כמתואר בציור. BD הוא קוטר במעגל. הנקודה E היא מפגש הישרים AB ו-DC (ראה ציור). א. הוכח: $\angle AED = \angle CDO$. ב. הוכח כי CO חוצה את הזווית DCA. נתון: $\frac{EB}{BA} = 2$. ג. הוכח כי המשולש ABO הוא שווה צלעות. ד. נתון: שטח הטרפז COBE הוא 9. מצא את סכום שטחי המשולשים COD ו-ABO ($S_{\triangle COD} + S_{\triangle ABO}$). 

ד. $\frac{2}{3}$.	AD ו- CE הם חוצי זווית במשולש ABC, ונקודת החיתוך שלהם היא F. נתון: $\angle ABC = 60^\circ$. א. הוכח כי אפשר לחסום את המרובע BDFE במעגל. נתון: FB הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע BDFE. ב. הוכח שהמשולש ABC הוא משולש שווה צלעות. המשך הקטע BF חותך את הצלע AC בנקודה G. ג. הוכח כי הקטע FG שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המרובע BDFE. בנקודה F מעבירים משיק למעגל החוסם את המרובע BDFE. המשיק חותך את הצלעות BA ו- BC בנקודות K ו- L בהתאמה. ד. מצא את היחס $\frac{KL}{AC}$. נמק את תשובתך.
א. הוכחה. (1) (2) $KL = \frac{2r^2}{a}$ ב. הוכחה. (1) (2) $P_{ABCD} = \frac{8r^2}{a}$ ג. לא.	 EG הוא מיתר במעגל שמרכזו M ורדיוס r. דרך הנקודות E ו- G העבירו משיקים למעגל. דרך מרכז המעגל, M, העבירו ישר המקביל למיתר EG וחותך את המשיקים בנקודות K ו- L, כמתואר בציור. דרך מרכז המעגל, M, העבירו אנך ל- KL אשר חותך את המיתר EG בנקודה T ואת המעגל בנקודות H ו- I, כמתואר בציור. נסמן: $TG = a$. א. (1) הוכח: $TG \cdot ML = MG^2$ (2) הבע את אורך הקטע KL באמצעות a ו- r. דרך הנקודות H ו- I העבירו משיקים למעגל כך שנוצר טרפז שוקיים ABCD שחוסם את המעגל, כמתואר בציור. ב. (1) הוכח: $BC = KL$ (2) הבע את היקף הטרפז ABCD באמצעות a ו- r. ג. האם היחס בין היקף הטרפז ABCD והיקף המעגל יכול להיות קטן מ- $\frac{4}{\pi}$? נמק.
	AB הוא קוטר במעגל. CD ו- AF הם שני מיתרים במעגל המקבילים זה לזה. AB ו- CD נחתכים בנקודה K (ראה ציור). נתון כי $\widehat{CA} = \widehat{AF}$ (הקשתות המסומנות בציור). א. (1) הוכח כי $\angle FAB = \angle CAB$ (2) הוכח כי $BK = BD$ ב. הוכח כי המרובע AFKC הוא מעוין. ג. נתון גם כי $BD \cdot AB = CD \cdot AC$ (1) הוכח כי $\triangle BDC \sim \triangle CAB$ (2) הוכח כי CD הוא קוטר במעגל.



המשולש BCF חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. BF הוא קוטר במעגל.
 מן הנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל – האחד משיק למעגל בנקודה B
 והאחר חותך את המושך הצלע CF בנקודה D, כמתואר בציור שלפניך.
 נתון: $AD \perp CD$.

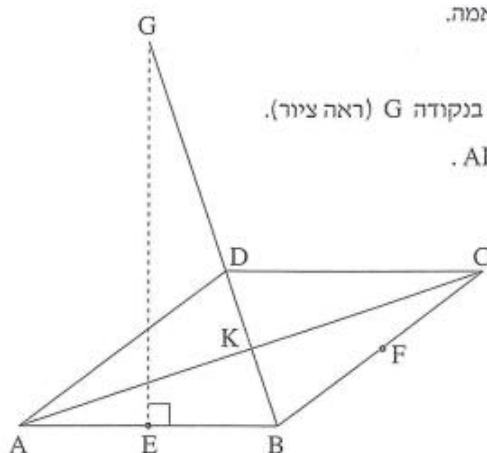
נ. הוכח: $\angle BFC = \angle BAD$.

נתון: K היא נקודה על הצלע BC , כך ש- FK חוצה את BFC .

ב. הוכח: $KC = \frac{CF \cdot BO}{AB}$.

ג. הוכח: $KB \cdot AB = 2R^2$.

7. הסבר מדוע שטח ΔBFK גדול משטח ΔKFC .



ABCD הוא מעוין. E ו-F הן אמצעי הצלעות AB ו-BC בהתאמה.

הנקודה K היא מפגש האלכסונים של המעוין.

מִן הַנִּקּוּדָה E הָעֵלּוֹ אֵן ל־ AB, הַחוּתֵן אֶת הַמִּשְׁךְ הָאֶלְכִסּוֹן BD בַּנִּקּוּדָה G (רְאֵה צִיּוּר).

א. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

הקטע GF חותך את האלכסון AC בנקודה M,

שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC.

ב. הוכח שהמשולשים BFG , BKC , MFC דומים זה לזה.

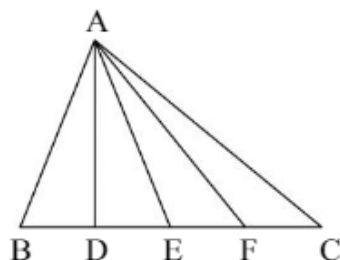
נסמן ב- R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ,

וב- r את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC.

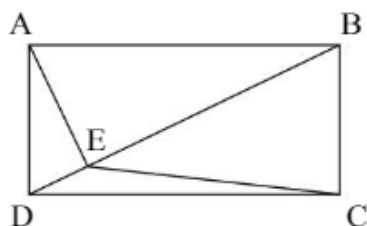
ג. (1) הוכח כי $\frac{MC}{GB} = \frac{MF}{CF}$ וכי $\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK}$.

(2) הראה כי היחס בין אלכסוני המעוין שווה ל- $\frac{r}{R}$.

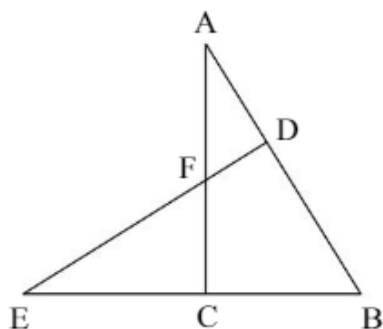
חלק ד': טריגונומטריה במישור – עד וכולל שטח משולש



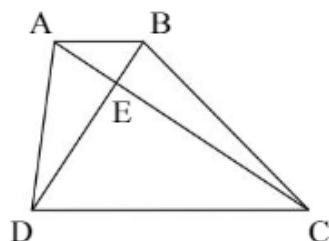
1. הקטע AD שאורכו 6 ס"מ הוא הגובה במשולש $\triangle ABC$. נתון: $\angle BAD = 18^\circ$, $BD = DE = EF = CF$. חשב את:
 א. אורך הקטע DE.
 ב. הזווית: 1. $\angle AFD$ 2. $\angle CAF$



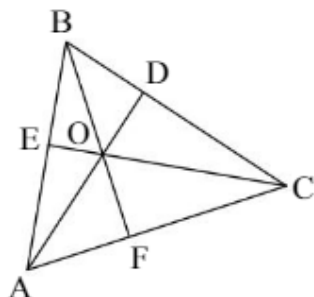
2. במלבן ABCD הקטע AE מאונך לאלכסון BD. נתון: $BE = 11.08$ ס"מ, $BC = 5$ ס"מ. שטח המשולש $\triangle BCE$ הוא 25.57 סמ"ר. חשב את:
 א. הזווית $\angle DAE$.
 ב. אורך הקטע DE.
 ג. שטח המשולש $\triangle CDE$.



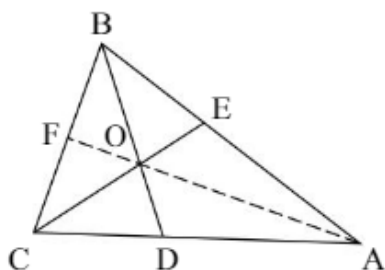
3. הנקודות C ו-D נמצאות בהתאמה על הישרים BE ו-AB. הישרים AC ו-DE נחתכים בנקודה F כך שמתקיים: $DE \perp AB$, $AC \perp BE$. נתון: $CE = 8$ ס"מ, $AD = CF = 5$ ס"מ. חשב את:
 א. אורך DF.
 ב. שטחי המשולשים $\triangle ABF$ ו- $\triangle BDE$.



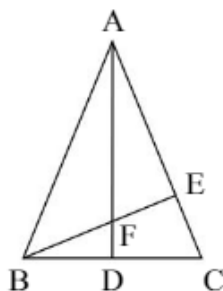
4. אלכסוני הטרפז ABCD ($AB \parallel CD$) מאונכים זה לזה ונחתכים בנקודה E. שטח המשולש $\triangle CDE$ הוא 24 סמ"ר. נתון: $CE = 8$ ס"מ.
 א. חשב את אורך CD.
 ב. נתון: $\angle CDE = 2 \cdot \angle ADB$.
 חשב את היקף המשולש $\triangle ADE$.
 ג. חשב את שטח המשולש $\triangle BCE$.



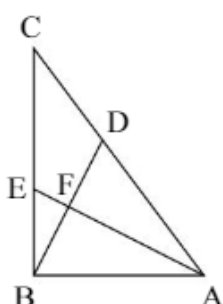
5. במשולש $\triangle ABC$ הגבהים CE, AD ו-BF נחתכים בנקודה O. נתון: $CO = 9$ ס"מ, $EO = 3$ ס"מ. שטח המשולש $\triangle ACE$ הוא 36 סמ"ר. חשב את:
 א. אורכי הקטעים AF ו-BE.
 ב. היקף המשולש $\triangle ABC$.



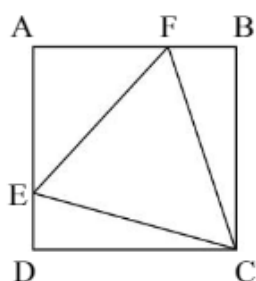
6. במשולש $\triangle ABC$ שווה השוקיים ($AB = AC$) חוצי הזווית $\angle AEC = 114^\circ$. נתון: BD , CE ו- AF נחתכים בנקודה O .
 א. חשב את הזווית $\angle ACB$.
 ב. שטח המשולש $\triangle ABC$ הוא 38 סמ"ר. חשב את היקפו.
 ג. חשב את אורך הקטע AO .



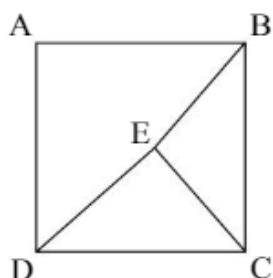
7. במשולש $\triangle ABC$ שווה השוקיים ($AB = AC$) הגבהים AD ו- BE נחתכים בנקודה F . נתון: $BE = AE$, $AC = 8$ ס"מ.
 א. חשב את אורכי הקטעים AE ו- AF .
 ב. חשב את שטח המשולש $\triangle BDF$.
 ג. הנקודה M היא אמצע AE . חשב את הזווית $\angle AMF$.



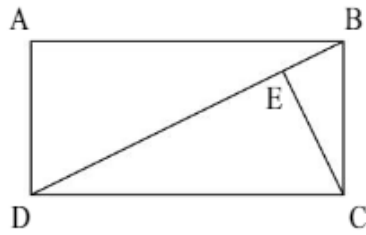
8. במשולש ישר הזווית $\triangle ABC$ הנקודות D ו- E נמצאות בהתאמה על היתר AC ועל הניצב BC . הישר AE חוצה את הזווית $\angle BAC$. הישרים AE ו- BD מאונכים זה לזה ונחתכים בנקודה F . נתון: $AC = 10a$, $BC = 8a$.
 א. הבע באמצעות a את אורכי הקטעים BD ו- CD .
 ב. נתון: שטח המשולש $\triangle BCD$ הוא 43 סמ"ר. חשב את היקף המשולש $\triangle ABC$.



9. (*) המשולש $\triangle CEF$ כלוא בריבוע $ABCD$ כמתואר בשרטוט. נתון: $\angle ECF = 56^\circ$, $AF = 2BF$.
 א. חשב את היחס $\frac{AE}{DE}$.
 ב. חשב את הזווית $\angle CFE$.
 ג. נתון: שטח המשולש $\triangle CEF$ הוא 100 סמ"ר. חשב את היקף הריבוע $ABCD$.



10. (*) הנקודה E נמצאת בתוך הריבוע $ABCD$ ששטחו $16p^2$. נתון: $\angle CED = 90^\circ$, $DE = 3p$.
 א. חשב את הזווית $\angle BCE$.
 ב. חשב את הזווית $\angle CBE$ (הדרכה: הורד אנך מ- E ל- BC).
 ג. נתון: שטח המשולש $\triangle BCE$ קטן ב-12 סמ"ר משטח המשולש $\triangle CDE$. חשב את אורך BE .



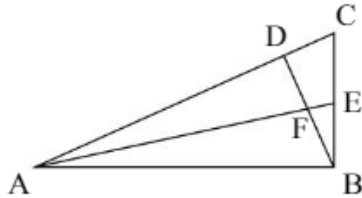
11. (*) הנקודה E נמצאת על האלכסון BD במלבן ABCD.

הישר CE הוא גובה במשולש ABCD.

נסמן: $AB = 2m$, $\angle ABD = \alpha$.

א. הוכח: $BE = \frac{2m \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$.

ב. הוכח: שטח המשולש $\triangle CDE$ הוא: $2m^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

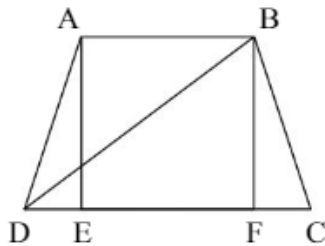


12. (*) במשולש ישר הזווית $\triangle ABC$ הגובה BD וחוצה הזווית AE

נחתכים בנקודה F. נסמן: $DF = m$, $\angle BAE = \alpha$.

א. הבע באמצעות m ו- α את אורכי הקטעים AB ו-BD.

ב. נתון: $AB = 2.2BD$. מצא את α .



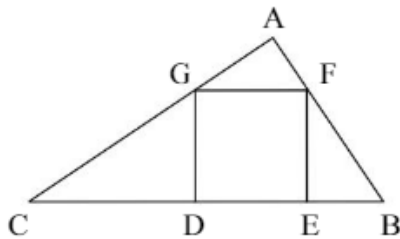
13. (*) AB הוא הבסיס הקצר בטרפז ABCD. הישרים BF ו-AE

הם גבהים בטרפז. נסמן: $AB = AE = a$, $\angle BDC = \beta$.

א. הבע באמצעות β ו-a את אורך הקטע DE.

ב. נתון: $BD = CD$. הבע באמצעות a ו- β את אורך BC.

ג. נתון: שטח המשולש ABCD הוא: a^2 . מצא את β .



14. (*) הריבוע DEFG חסום במשולש ישר הזווית $\triangle ABC$

($\angle BAC = 90^\circ$). נסמן: $AC = b$, $\angle AGF = \beta$.

א. הבע באמצעות b ו- β את אורך צלע הריבוע.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{DEFG}}$ כאשר $\beta = 45^\circ$.

תשובות: 1) א. 1.95 ס"מ. ב. 1. 56.98°. 2. 11.25°. 3) א. 3.13 ס"מ. ב. 49.3 סמ"ר, $S_{\triangle ABE} = 20.08$ סמ"ר, $S_{\triangle ABF} = 15.71$ ס"מ.

4) א. 10 ס"מ. ב. 15.71 ס"מ. 5) א. 5.37 ס"מ, $AF = 6$ ס"מ, $BE = 38.84$ ס"מ. 6) א. 76°. ב. 31.6 ס"מ.

7) א. 5.66 ס"מ, $AE = 6.13$ ס"מ, $AF = 1.93$ סמ"ר. ג. 140.41°. 8) א. $BD = 5.37a$, $CD = 4a$. ב. 50.8 ס"מ. 9) א. 2.57. ב. 61.23°. ג. 59.52 ס"מ.

10) א. 41.41°. ב. 41.04°. ג. 13.51 ס"מ. 11) א. $BD = \frac{m \tan 2\alpha}{\tan \alpha}$, $AB = \frac{m}{\tan \alpha \cdot \cos 2\alpha}$.

12) א. 13.52°.

13) א. $\frac{a \cdot (1 - \tan \beta)}{\tan \beta} = \frac{a}{\tan \beta} - a$. ב. $\frac{a}{\cos \frac{\beta}{2}}$. ג. $\beta = 30^\circ$. 14) א. $\frac{b \sin \beta}{1 + \sin \beta \cdot \cos \beta}$. ב. $\frac{1}{4}$.